

Simulador sistema masa-resorte

André Robles Bueckmann, iD'A01706832

Un sistema masa-resorte se plantea como un sistema con una masa "m" de la que se conecta un resorte con una constante de resorte "k" que a su vez está anclado a una pared. Se asume que la superficie donde se encuentran la masa y la pared es completamente horizontal. Se asume también que la masa se suelta desde una posición inicial "x0", la cuál corresponde a la distancia desde el punto de equilibrio. Las fuerzas involucradas en este sistema son:

La fuerza de fricción:

$$F_1 = -\beta v$$

Donde Beta es el coeficiente de amortiguamiento y "v" la velocidad.

La fuerza del resorte (Proveniente de la ley de Hooke):

$$F_2 = -kx$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas de un sistema es igual a "ma", es decir la masa veces aceleración:

$$ma = -kx - \beta v$$

De donde podemos reinterpretar la ecuación como la aceleración siendo la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo, y la velocidad la primera derivada. De este modo nuestra ecuación diferencial ordinaria homogénea es:

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x$$

En la cuál una representación común de la solución se toma como:

$$x(t) = Re^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t + \phi)$$

Donde ϕ es un ajuste de fase, λ y ω están determinados por m, k, y β . R es la amplitud.

Cuando tenemos un sistema amortiguado (sin fricción), consideramos la fuerza de amortiguamiento como 0 y por lo tanto la ecuación diferencial se reduce a:

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x$$

La cuál resuelta se obtiene:

$$x(t) = R \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

Sin embargo, en un sistema físico real, son raras las aplicaciones sin fricción. Para el caso real, un sistema con amortiguamiento tiene tres posibles comportamientos: subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado.

La importancia del sistema reside en la manifestación física para suspensiones, aislantes de vibraciones en estructuras, o incluso para instrumentos de medición.

Para resolver una ecuación diferencial, podemos optar por utilizar un método numérico en lugar de solucionarlo analíticamente. En este caso, MATLAB provee para este propósito la función ODE45, la cuál es una implementación de Runge-kutta de cuarto y quinto orden.

Los parámetros a dar son los siguientes:

```
% Coeficiente de amortiguamiento
beta = 0.5 % beta
```

```
beta = 0.5000
```

```
% Posición inicial
p0 = 5
```

```
p0 = 5
```

```
% Velocidad inicial
v0 = 0
```

```
v0 = 0
```

```
% Masa
m = 2
```

```
m = 2
```

```
% Coeficiente del resorte
k = 10
```

```
k = 10
```

La función que resuelve la EDO a través de ODE45 devuelve una matriz con el tiempo, los valores del desplazamiento y los valores de la velocidad. La función encargada de esto es **masaResorte**.

```
% firma de la función
function dxdt = sistemaEcuaciones(t, x, m, k, beta)
    % inicializar un vector de ceros de tamaño 2x1
    dxdt = zeros(2, 1);
    % asignamos al primer renglón la función del segundo estado de la variable x
    dxdt(1) = x(2);
    % asignamos al segundo renglón la función que incorpora a los dos
    % estados (posición y tiempo) de x
    dxdt(2) = - (beta/m) * x(2) - (k/m) * x(1);
end

function [t, sol, condicion] = masaResorte(m, k, beta, p0, v0, tspan)
    % planteamos condiciones iniciales
```

```

cond = [p0, v0];
% utilizamos ode45 para resolver y devolvemos.
[t, sol] = ode45(@(t, x) sistemaEcuaciones(t, x, m, k, beta), tspan, cond);
% calculo del discriminante
dis = sqrt((beta/2*m)^2 - (k/m)^2);
% condicional para determinar el tipo de amortiguamiento de acuerdo al
% discriminante
if dis < 0
    condicion = "subamortiguado";
elseif dis == 0
    condicion = "críticamente amortiguado";
else
    condicion = "sobreamortiguado";
end
end
end

```

El siguiente código genera gráficas de la solución de la EDO del sistema masa-resorte para la posición, velocidad y aceleración con respecto al tiempo.

```

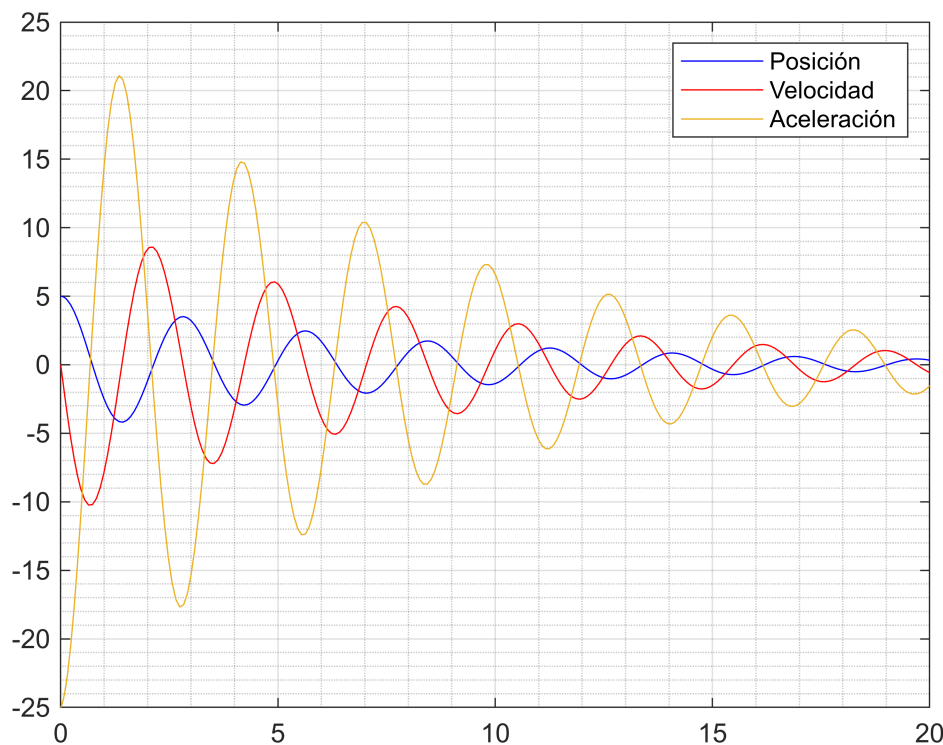
function [] = resultados(m, k, beta, p0, v0)
% Tiempo inicial y final sobre el que se graficara
tspan = [0, 20];
% llamada a la función masaResorte
[t, sol, condicion] = masaResorte(m, k, beta, p0, v0, tspan);
% asignación de función de aceleración para graficar
a = (-(beta/m) * sol(:,2) - (k/m) * sol(:,1));
% imprimir condición del sistema
disp(strcat('La condición del sistema es:: ', condicion));
% graficar
plot(t, sol(:, 1), '-b', 'DisplayName', 'Posición');
hold on;
plot(t, sol(:, 2), '-r', 'DisplayName', 'Velocidad');
plot(t, a, 'DisplayName', 'Aceleración')
grid on;
% aumentar la densidad de la cuadrícula
grid minor;
% mostrar asignación de la gráfica
legend show;
% acabar la figura
hold off;
end

```

Ahora estamos listos para graficar una de las interpretaciones del sistema de masa resorte con los parámetros dados anteriormente:

```
resultados(m, k, beta, p0, v0);
```

```
La condición del sistema es::sobreamortiguado
```



La gráfica anterior plantea un sistema masa-resorte en el que podemos observar, existe una oscilación decreciente conforme al tiempo. Este comportamiento proviene de que en el comportamiendo "**subamortiguado**", el discriminante del de las raíces durante el cálculo de la solución de la EDO es negativo, y por lo tanto la solución presenta números imaginarios. Estos, a través de la identidad de Euler se pueden pensar como una combinación de funciones trigonométricas las cuáles a su vez manifiestan oscilación en el sistema físico. Aplicaciones ingenieriles pueden ser la suspensión de un carro, en donde es natural que la suspensión de un vehículo recibe una oscilación en un impacto vertical, y donde queremos que esa oscilación decrezca lo más rápido posible en el tiempo.

Ahora bien, el **discriminante** de la solución de las raíces es el componente que determina que tipo de comportamiento de nuestro sistema. El determinante de un sistema masa-resorte está dado como:

$$\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

Donde:

$$\lambda = \frac{\beta}{2m}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Veamos ahora lo que sucede cuando este determinante es igual a 0, proponiendo nuevos parámetros:

beta = 2;

beta = 2

m = 1;

```
m = 1
```

```
k = 1;
```

```
k = 1
```

```
p0 = 5;
```

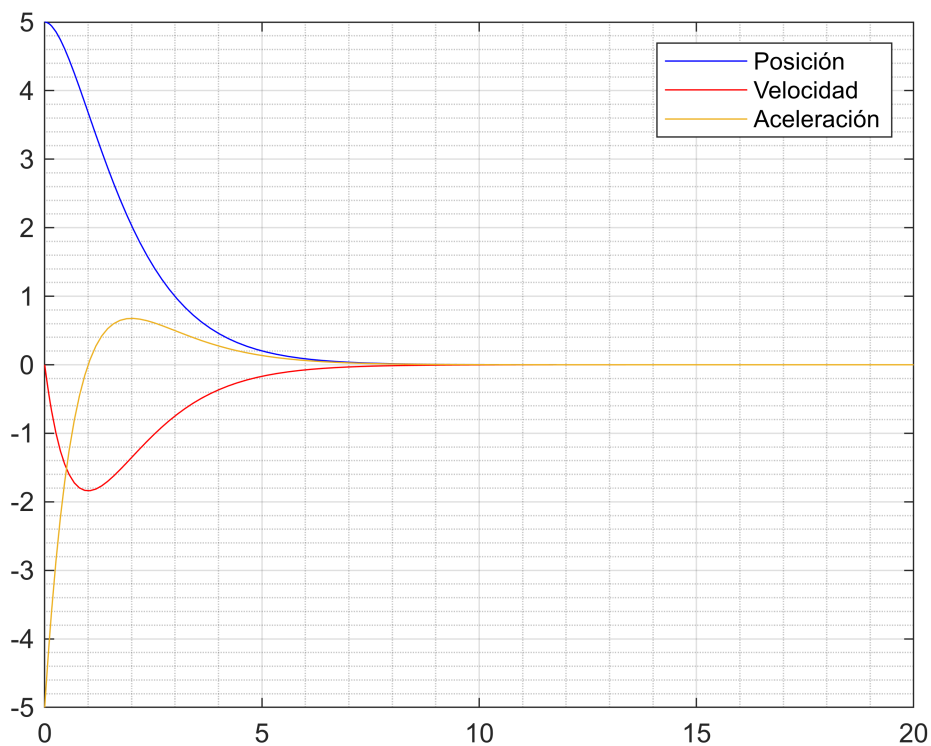
```
p0 = 5
```

```
v0 = 0;
```

```
v0 = 0
```

```
tspan = [0, 20];  
resultados(m, k, beta, p0, v0);
```

La condición del sistema es::críticamente amortiguado



Así, igualando el determinante a 0 logramos un sistema **críticamente amortiguado**, en el que ya no tenemos oscilaciones, y la posición regresa al punto de equilibrio ($x = 0$) y se detiene; lo mismo sucede con la velocidad y la aceleración en el momento en el que la masa llega al punto de equilibrio, estas condiciones físicas dejan de manifestarse. Casos de uso pueden rondar sistemas robóticos en donde necesitamos precisión en los movimientos, y por lo tanto no podemos permitir que después de un movimiento de un brazo robótico por ejemplo tengamos oscilaciones, por más pequeñas que estas sean.

Para obtener el último caso, requerimos por consiguiente que el determinante sea positivo, para lo cuál usaremos los siguientes parámetros:

```
beta = 3;
```

```
beta = 3
```

```
m = 0.5;
```

```
m = 0.5000
```

```
k = 1;
```

```
k = 1
```

```
p0 = 5;
```

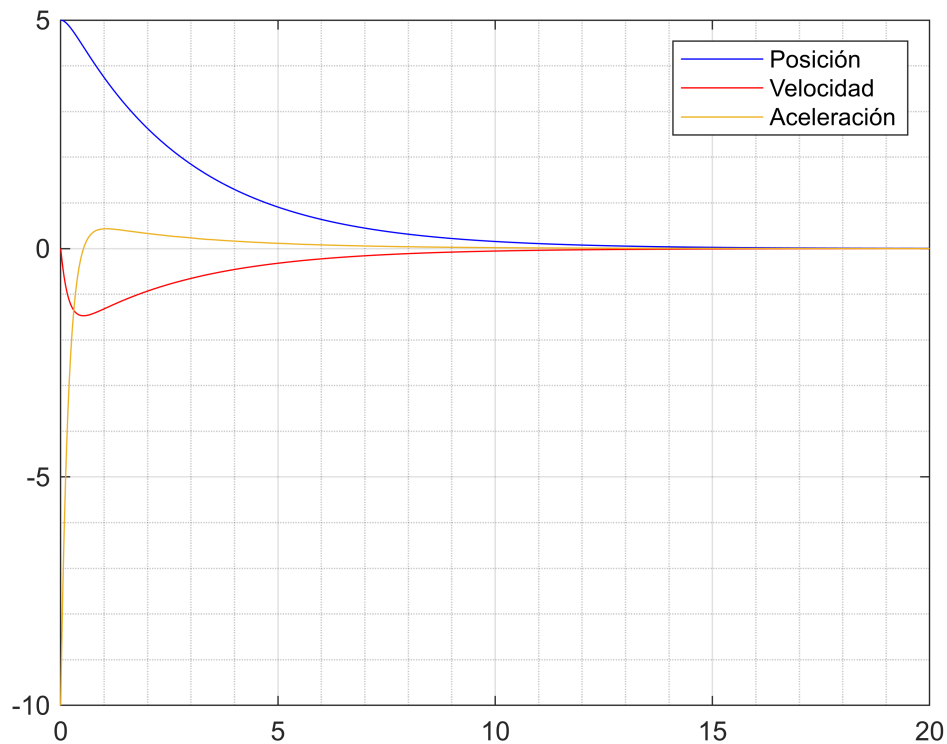
```
p0 = 5
```

```
v0 = 0;
```

```
v0 = 0
```

```
tspan = [0, 20];  
resultados(m, k, beta, p0, v0);
```

La condición del sistema es::sobreamortiguado



En este último caso tenemos un sistema **sobreamortiguado**, cuya principal característica es prolongar el tiempo que le toma a la masa regresar a su punto de equilibrio. La aceleración (la capacidad de un objeto de crecer en velocidad) decrece súbitamente a consecuencia. Esto es útil en casos mecánicos como los de una puerta amortiguada para evitar golpes abruptos, sino cierres suaves para ya sea evitar ruido o preservar la condición de la puerta.

Podemos pensar por último en un sistema sin fricción, es decir volver la fuerza $F_1 = -\beta v = 0$

Utilizaremos entonces los siguientes parámetros:

```
beta = 0;
```

```
beta = 0
```

```
m = 1;
```

```
m = 1
```

```
k = 1;
```

```
k = 1
```

```
p0 = 5;
```

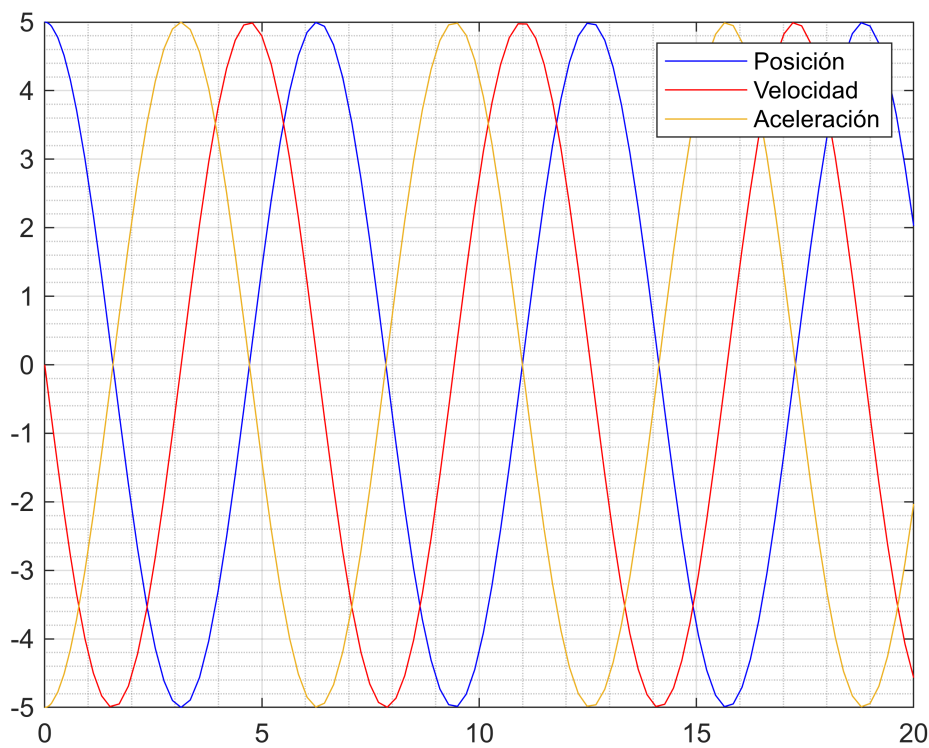
```
p0 = 5
```

```
v0 = 0;
```

```
v0 = 0
```

```
tspan = [0, 20];  
resultados(m, k, beta, p0, v0);
```

La condición del sistema es::sobreamortiguado



En este caso, el sistema se considera sobreamortiguado, pero la clasificación es técnicamente ineficiente, puesto que es un sistema ficticio en donde conservamos la amplitud de la posición indefinidamente. Esto hace sentido pues si recordamos, un sistema sin amortiguamiento no tiene una fuerza que lo disipe la energía conforme el tiempo. Otra manera de entenderlo es que la solución de esta EDO no tiene una función envolvente como los demás casos (en los que la función envolvente permite un decrecimiento exponencial).

Notar por último que en todos los casos la aceleración siempre empieza en su punto máximo, no solo por que analíticamente hace sentido:

La posición en $t = 0$ es determinada por una función coseno, entonces velocidad dada como la derivada: "-seno", entonces la aceleración dada como su derivada: "-coseno"), que es el máximo de la posición con signo inverso.

Sino por que si pensamos en el contexto físico, en el punto cero, de no estar la masa en el punto de equilibrio, la fuerza ejercida por el resorte es la máxima posible por el sistema, y esta depende a su vez de la aceleración.

El sistema masa-resorte es un recurso ingenieril fundamental de aplicaciones diversas, y de donde diferentes fenómenos se pueden presentar; tanto en contextos físicos reales como ficticios, y con manifestaciones de aceleración, velocidad y posición distintivas.

Referencias:

MathWorks. Documentation: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html>

Dr. Ernesto Momox Beristain. Módulo: Modelación con ecuaciones diferenciales. 2024.