Exploración interna de matemáticas SL

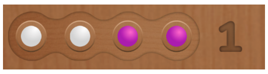
Breve introducción matemática al juego Mastermind

Código de candidato: kbk560

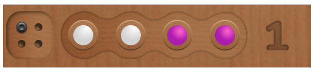
Introducción

Mastermind es un juego de mesa de dos jugadores diseñado por Mordecai Meirowitz en 1970. El juego original consiste en que un **jugador$_1$** crea un código a partir de pines de 6 colores diferentes que coloca en 4 espacios (el juego no está limitado a estas condiciones, sin embargo serán las que se utilizarán en esta exploración). De esta manera, el **jugador$_2$** trata de descifrar el código recibiendo retroalimentación en cada turno que el **jugador$_1$** le proporciona en forma de pines blancos y negros (los colores seleccionados también son exclusivos para el entendimiento de esta exploración). A continuación se presenta un ejemplo:

Asumiendo que el jugador$_1$ ya eligió un código a ser descubierto (en este caso la máquina), el jugador$_2$ comienza el juego sugiriendo un código de colores como suposición:



En segundo lugar, el jugador$_2$ recibe una retroalimentación de parte del jugador$_1$ en forma de pines blancos y negros, donde los negros indican que el jugador $_2$ acertó tanto el color como la posición de uno de los colores sugeridos, y los pines blancos que solo se acertó un color sugerido:



Como el jugador recibió únicamente 1 pin negro, quiere decir que tiene que adivinar el color y la posición de 3 colores faltantes. Y no solo eso, sino que el jugador$_2$ no sabe a cuál color el pin negro está haciendo referencia, por lo que a través de prueba y error y usando la retroalimentación del jugador$_1$, el jugador$_2$ eventualmente adivinará el código:

Como se puede observar, el juego acaba en el momento en el que la retroalimentación dada es de 4 pines negros, puesto que quiere decir que has acertado todos los colores en las posiciones correspondientes. Todas estas condiciones y retos mentales vuelven a "Mastermind" un juego muy interesante de jugar y que personalmente captó mi atención, sobre todo por el razonamiento que puede llegar a existir detrás de un juego con un sistema de retroalimentación tan característico.

Glosario y parámetros

Los parámetros a utilizar durante la exploración del juego Mastermind serán los siguientes:

Tabla 1. Parámetros.

Parámetros:	
Número de colores (C).	6
Longitud de código (L).	4
Número de formas de retroalimentación.	3

Para facilitar el entendimiento de la exploración y volverla más dinámica, se propone la siguiente lista de acrónimos y definiciones:

Tabla 2. Glosario.

Componente.	Es el elemento individual que compone un código en el juego. Por ejemplo, del código (x_1, x_2, x_3, x_4) un componente sería "x_1".
Código.	Conjunto de componentes. Por ejemplo: (x_1, x_2, x_3, x_4).
Forma de retroalimentación (FR).	Las FR se utilizan para referirse a las maneras individuales a las que se le da retroalimentación sobre cada componente del código con respecto a su color y posición. Existen tantos FR como longitud de código (L) por adivinar. *Para hacer mención a un FR en específico se escribirá de la forma: FRB, FRE, FRN. Existen tres formas diferentes en las que el *jugador*$_1$ puede dar

	retroalimentación al *jugador$_2$*:
	Pin Blanco (B): Indica que el jugador$_2$ acertó un color del código, mas no la posición.
	Pin Negro (N): Indica que el jugador$_2$ acertó tanto el color como la posición.
	Espacio vacío (E): Indica que el jugador no adivinó ni la posición ni el color de un componente.
Clave única de retroalimentación (CUR).	Es el conjunto de FR que forman la retroalimentación de un código propuesto por el jugador$_2$. Por ejemplo, (N,E,E,B) en donde cabe destacar que como regla la **posición de los FR** es aleatoria y no da información con respecto al código.
Códigos posibles en el "n-ésimo" turno (CPn).	Indican las combinaciones posibles de un turno. Por ende, lo analizado antes de jugar un turno será "CP0"; después de jugar un turno "CP1", y así sucesivamente.

Búsqueda de objetivo de la exploración

El objetivo de esta exploración consiste en descubrir la mejor primera jugada en *Mastermind*. Se entenderá por primera mejor jugada a la estrategia que menos códigos posibles deje después de un turno. Para esto, haremos referencia a la propuesta del profesor de estadística en la Universidad de Standford Donald Knuth. Dentro de sus trabajos desarrolló un algoritmo que ya es capaz de resolver el juego *Mastermind*, sin embargo lo logra a través de un algoritmo computacional complejo el cuál no incluiremos en la exploración matemática. La premisa de Knuth describe que la mejor primera jugada es empezar con dos colores de la forma (1, 1, 2, 2) (Knuth, 1977). Sin embargo, para demostrar lo anterior debemos tomar en cuenta las cuatro estrategias posibles para el turno 1, las cuáles son:

Empezar con 1 color (*Estrategia 1*).
Empezar con 2 colores (*Estrategia 2*), (la mejor estrategia de acuerdo a Knuth).
Empezar con 3 colores (*Estrategia 3*).
Empezar con 4 colores (*Estrategia 4*).

Metodología

Para obtener la mejor primera jugada, primero obtendremos la cantidad de formas de retroalimentación (CUR) y la probabilidad (P) de obtener cada uno, independientemente del código propuesto por el jugador$_2$. Posteriormente, calcularemos los CP1 de cada CUR en las 4 estrategias propuestas anteriormente. Finalmente, entrelazaremos la probabilidad de obtener un determinado

CUR al número de colores que se escoja usar para el CP1, para obtener que estrategia da en promedio el menor número de códigos restantes después del primer turno.

Cálculo de CUR

Para calcular el número de CUR existentes se debe entender que existe una longitud de FR en las que el **jugador$_1$** le da retroalimentación al **jugador$_2$**, y que existen 3 formas diferentes de dar retroalimentación. La cantidad de CUR es un una combinación en donde los elementos (FR) se pueden repetir, por lo que se hará uso de la fórmula de combinaciones con repetición:

$$CR_{FR}^{L} = \frac{(FR+L-1)!}{L! \times (FR-1)!}$$

Sustituyendo la longitud del código "L" (4) y la cantidad de "FR" (3), el resultado es el siguiente:

$$CR_{3}^{4} = \frac{(3+4-1)!}{4! \times (3-1)!} = \frac{6!}{4!\times 2!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times2\times1} = \frac{6\times5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Es decir, tenemos 15 FR para cada permutación de código. Al ser un número relativamente pequeño podemos averiguar de manera manual cuáles son las 15 CUR:

Tabla 3. CUR's.

(N, N, N, N)	(N, B, B, B)	(B, B, B, E)
(N, N, N, B)	(N, N, E, E)	(N, E, E, E)
(N, N, N, E)	(N, B, B, E)	(B, B, E, E)
(N, N, B, B)	(B, B, B, B)	(B, E, E, E)
(N, N, B, E)	(N, B, E, E)	(E, E, E, E)

Cabe recalcar que de las 15 CUR, la combinación (N,N,N,B) no puede existir, puesto que la probabilidad de que un FRB acontezca está condicionada como veremos más adelante. Sin embargo, basta con destacar que esta combinación no puede existir si B indica que no está en la posición correcta, si no hay espacios en donde colocarla en la posición correcta.

Cálculo de espacio muestral

Ahora se necesita calcular el espacio muestral, para lograr calcular posteriormente la probabilidad de obtener un determinado CUR, y posteriormente los CP1. Si consideramos que existe una cantidad C colores por longitud L donde se incluyen todos los elementos y se permite la repetición, entonces la fórmula a usar es variación con repetición:

$$VR_{C}^{L} = C^{L}$$

Por lo tanto, la cantidad de códigos de acuerdo a nuestros parámetros es:

$$VR_6^4 = 6^4 = 1296$$

La cardinalidad del espacio muestral (1296) será necesaria para calcular la probabilidad de obtener cada CUR de manera independiente en el siguiente apartado.

Probabilidad de obtener un CUR

Existen varias consideraciones para el cálculo de la probabilidad de obtener un CUR. Primeramente debemos determinar cuál es la probabilidad de obtener cada FR, para que la multiplicación de estas nos den una probabilidad sobre el espacio muestral:

$$\frac{FR \times FR \times FR \times FR}{1296} = P(CUR)$$

Determinar la probabilidad de obtener cada FR fue el problema más difícil de la exploración matemática. Partamos por la regla de tener que normalizar la probabilidad de los FR; es decir que la suma de los diferentes FR tiene que ser igual a 1, para que el conjunto de estos (el CUR) sea coherente con el espacio muestral:

$$P(n) + P(B) + P(E) = 1$$

Probabilidad de N: Individualmente, cada FRN tiene una P(N) de entre 6 colores de acertar, pues solo 1 es el color correcto.

$$P(N) = \frac{1}{6}$$

Probabilidad de B: Individualmente, cada B tiene una probabilidad de acontecer condicionada. Un FRB solo puede existir si existe otro FRBB o FRE que le permitan intercambiar su posición. Recordemos que una blanca indica que se acertó el color, mas no la posición. Por lo tanto:

$$4 \geq FRB \geq 2.$$

De acuerdo a esto, se hacen las siguientes suposiciones donde la probabilidad de obtener una FRB es el promedio de las probabilidades de obtener FRB en función de cuántas FRB y FRE existen en un CUR. Un último punto a destacar es que si la suma de los FR es igual a 1 y la P(N) = $\frac{1}{6}$, entonces:

$$P(B) + P(E) = \frac{5}{6}.$$

A continuación, se desmenuzan las probabilidades de obtener un FRB en función de cuántas FRB y FRE existan.

Si FRB = 1 entonces:

No puede existir el CUR, pues debe existir un espacio en donde intercambiar posición.

Si FRB + FRE = 2, donde $FRB > 1$ entonces:

$$P(B) = \frac{1}{6} \text{ por lo tanto } P(E) = \frac{4}{6}$$

Si FRB + FRE = 3, donde $FRB > 1$ entonces:

$$P(B) \;=\; \frac{2}{6} \text{ por lo tanto } P(E) = \frac{3}{6}$$

Si FRB + FRE = 4, donde FRB > 1 entonces:

$$P(B) = \frac{3}{6} \text{ por lo tanto } P(E) = \frac{2}{6}$$

Con esta información, se tomó la decisión de utilizar el promedio de las posibilidades de obtener un FRB, la cuál es:

$$(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6})/3 \;=\; \frac{2}{6} \;=\; P(\overline{B})$$

Probabilidad de E: Sabiendo que la probabilidad de un FRN = $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de FRB es $\frac{2}{6}$, la probabilidad de FRE queda de la siguiente manera:

$$P(E) \;+ \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \; 1 \quad \text{Por lo tanto} \quad P(E) \;=\; \frac{3}{6}$$

Con la probabilidad de cada FR obtenida, sigue obtener los 15 conjuntos de FR, los cuáles tienen que operar sobre un cardinalidad del espacio muestral de 81 variaciones calculada a continuación:

$$VR_C^L = C^L$$

Por lo tanto:

$$VR_3^4 = 3^4 \;=\; 81$$

Estas son las combinaciones posibles contando las maneras de ordenarlos de los CUR. Sin embargo, si sabemos que la cantidad sin repetición de estos es 15, cada CUR tendrá un factor por el que será multiplicado que depende de la cantidad de maneras que tiene de ordenarse. La razón de seguir esta metodología es debido a que la suma de las posibilidades de obtener un CUR debe conservar la cardinalidad del espacio muestral (1296). Por ejemplo, si queremos calcular la probabilidad porcentual del CUR (N, B, E, E), se realiza el siguiente procedimiento:

(N, B, E, E) donde:

$$P(N) \;= \frac{1}{6},\, P(B) = \frac{2}{6},\, P(E) = \frac{3}{6} \;\rightarrow\; (\frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}) = \frac{18}{1296} \;\rightarrow\; \frac{18}{1296} \times 12 \;=\; \frac{1}{6}$$

Ya multiplicado la probabilidad de obtener un CUR por el factor “6”, que son las maneras de ordenar el conjunto de los FR, la probabilidad porcentual se calcula como:

$$P(N \cap B \cap E \cap E) \;= \frac{1}{6} \times 100 \;\approx\; 16.67\%$$

Es así que el cálculo de obtener cada CUR queda sintetizado y ordenada la probabilidad de forma descendente en la siguiente tabla:

Tabla 4. Probabilidad de obtener un CUR. P(CUR).

CUR	**P(CUR) sin el factor de combinaciones.**	**Factor de combinaciones.**	**P(CUR)**	**Probabilidad porcentual de P(CUR) (2 decimales).**
(N, N, N, N)	$\frac{1}{1296}$	1	$\frac{1}{1296}$	**0.08%**
(N, N, N, B)	$\frac{2}{1296}$	4	$\frac{8}{1296}$	**0.62%**
(N, N, N, E)	$\frac{3}{1296}$	4	$\frac{12}{1296}$	**0.93%**
(B, B, B, B)	$\frac{16}{1296}$	1	$\frac{16}{1296}$	**1.24%**
(N, N, B, B)	$\frac{4}{1296}$	6	$\frac{24}{1296}$	**1.85%**
(N, B, B, B)	$\frac{8}{1296}$	4	$\frac{32}{1296}$	**2.47%**
(N, N, E, E)	$\frac{9}{1296}$	6	$\frac{54}{1296}$	**4.17%**
(N, N, B, E)	$\frac{6}{1296}$	12	$\frac{72}{1296}$	**5.56%**
(E, E, E, E)	$\frac{81}{1296}$	1	$\frac{81}{1296}$	**6.25%**
(B, B, B, E)	$\frac{24}{1296}$	4	$\frac{96}{1296}$	**7.41%**
(N, E, E, E)	$\frac{27}{1296}$	4	$\frac{108}{1296}$	**8.33%**
(N, B, B, E)	$\frac{12}{1296}$	12	$\frac{144}{1296}$	**11.11%**
(N, B, E, E)	$\frac{18}{1296}$	12	$\frac{216}{1296}$	**16.67%**
(B, B, E, E)	$\frac{36}{1296}$	6	$\frac{216}{1296}$	**16.67%**
(B, E, E, E)	$\frac{54}{1296}$	4	$\frac{216}{1296}$	**16.67%**
	$\Sigma P(FR) \neq \frac{1296}{1296}$		$\Sigma P(FR) = \frac{12}{12}$	$\Sigma = 100\%$

Cálculo de códigos restantes por estrategia.

Para la segunda parte de la metodología es necesario establecer cuántos códigos quedan en el primer turno (CP1), después de haber recibido un CUR y además haber escogido una de las cuatro estrategias. Las consideraciones de este apartado son las siguientes:

- Durante este apartado, hay que mantener en la cabeza que a menor número de CP1 por cada CUR mejor, pues significan menos opciones a escoger.
- Por motivos prácticos, a pesar de que las P(FR) estén escritos a modo de probabilidad, se removerá la fracción ($\frac{x}{6}$) en las tablas y solo se utilizará el numerador.
- En las tablas, el enfoque debe centrarse en la columna "CP1", pues es la que indica los códigos restantes utilizando determinada estrategia y recibiendo determinado CUR.
- Dependiendo de la estrategia utilizada, existirán casos en los que no todos los CUR sean posibles, y por ende las probabilidades de los CUR que sí lo sean serán nuevamente ajustadas proporcionalmente entre ellas. Estas se pueden ver en las columnas "P(CUR) considerando la *Estrategia* x". Las filas de los CUR en verde serán entonces aquellas que sí pueden existir dada la "*Estrategia* x".

Finalmente, la manera de calcular cada estrategia está dada a continuación:

***Estrategia* 1: Empezar por 1 color.**

Si el primer código que proponemos cuenta únicamente con 1 color, entonces debemos descartar todo aquel CUR que contenga FRB, puesto que por definición un FRB ya estará en la posición correcta de solo haber un color. Con esto mencionado, los FR tienen los siguientes valores:

P(N) = $\frac{1}{6}$, puesto que el color se adivinó.

P(B) = $\frac{0}{6}$, puesto que es imposible obtener esta retroalimentación dada la *estrategia 1.*

P(E) = $\frac{5}{6}$, puesto que es el resto de los colores que no se encuentran en el código.

Por último, así como en el cálculo de los CUR, debemos tomar en cuenta las combinaciones que se pueden hacer con los colores, los cuáles se encuentran entre paréntesis en la forma (x). Así, la tabla para calcular el CP1 utilizando *Estrategia 1* es la siguiente:

Tabla 5. CP1 de *estrategia* 1. (Se omitieron las multiplicaciones por el factor "1").

CUR	CP1	Operaciones	P(CUR)	P(CUR) considerando la *Estrategia 1.*
(N, N, N, N)	1	(1)	0.0772%	0.40%
(N, N, N, B)	---	---	---	---
(N, N, B, B)	---	---	---	---
(N, B, B, B)	---	---	---	---
(N, N, N, E)	20	5 (4)	0.926%	4.71%
(N, N, B, E)	---	---	---	---
(B, B, B, B)	---	---	---	---
(N, B, B, E)	---	---	---	---
(N, N, E, E)	150	5 x 5 (6)	4.167%	21.10%
(B, B, B, E)	---	---	---	---
(N, B, E, E)	---	---	---	---
(B, B, E, E)	---	---	---	---
(B, E, E, E)	---	---	---	---
(N, E, E, E)	500	5 x 5 x 5 (4)	8.333%	42.16%
(E, E, E, E)	625	5 x 5 x 5 x 5 (1)	6.250%	32%
	$\Sigma = 1296$			$\Sigma = 100\%$

***Estrategia 2*: Empezar con 2 colores.**

Al usar 2 colores, los 15 CUR son posibles a excepción del de forma (N,N,N,B). Ahora bien, la característica primordial de la *Estrategia 2* es que los FRB solo tienen que ser alternados por el color restante, lo que habilitará menos códigos por cada CUR y consecuentemente volverlo una estrategia atractiva. Con esto mencionado, los FR tienen los siguientes valores:

P(N) = $\frac{1}{6}$, puesto que el color se adivinó.

P(B) = $\frac{1}{6}$, puesto que la posibilidad restante es la alternativa al color escogido.

- En el caso particular de los FRB, su valor también se puede interpretar como la cantidad de colores de la estrategia menos 1, es decir: B = 2-1, puesto que el 1 es el caso en el que acertarás la posición, convirtiéndose así en un FRN. Está lógica se aplicará en las siguientes estrategias.

P(E) = $\frac{4}{6}$, puesto que es el resto de los colores que no se encuentran en el código.

Por último, así como en el cálculo de los CUR, debemos tomar en cuenta las combinaciones que se pueden hacer con los colores, los cuáles se encuentran entre paréntesis en la forma (x). Así, la tabla para calcular el CP1 utilizando *Estrategia 2* es la siguiente:

Tabla 6. CP1 de *estrategia* 2. (Se omitieron las multiplicaciones por el factor "1").

CUR	CP1	Operaciones	P(CUR)	P(CUR) considerando la "Estrategia 2".
(N, N, N, N)	1	(1)	0.08%	0.09%
(N, N, N, B)	---	---	---	----
(N, N, N, E)	16	4 (4)	0.93%	0.93%
(N, N, B, B)	6	1 (6)	1.85%	1.86%
(N, N, B, E)	48	4 (12)	5.56%	5.6%
(N, B, B, B)	4	(4)	2.47%	2.48%
(N, N, E, E)	96	4 x 4 (6)	4.17%	4.19%
(N, B, B, E)	48	4 (12)	11.11%	11.18%
(B, B, B, B)	1	(1)	1.24%	1.24%
(N, B, E, E)	192	4 x 4 (12)	16.67%	16.77%
(B, B, B, E)	16	4 (4)	7.41%	7.45%
(N, E, E, E)	256	4 x 4 x 4 (4)	8.33%	8.38%
(B, B, E, E)	96	4 x 4 (6)	16.67%	16.77%
(B, E, E, E)	256	4 x 4 x 4 (4)	16.67%	16.77%
(E, E, E, E)	256	4 x 4 x 4 x 4 (1)	6.25%	6.29%
	$\Sigma = 1296$			$\Sigma = 100\%$

***Estrategia 3*: Empezar con 3 colores.**

Al usar 3 colores, los 15 CUR son posibles a excepción del de la forma (N,N,N,B). Con esto mencionado, los FR tienen los siguientes valores:

P(N) = $\frac{1}{6}$, puesto que el color se adivinó.

P(B) = $\frac{2}{6}$, puesto que se sigue el mismo principio que en *Estrategia 2*, es decir: $B \; = 3 - 1$

P(E) = $\frac{3}{6}$, puesto que es el resto de los colores que no se encuentran en el código.

Por último, así como en el cálculo de los CUR, debemos tomar en cuenta las combinaciones que se pueden hacer con los colores, los cuáles se encuentran entre paréntesis en la forma (x). Así, la tabla para calcular el CP1 utilizando *Estrategia 3* es la siguiente:

Tabla 7. CP1 de *estrategia* 3. (Se omitieron las multiplicaciones por el factor "1").

CUR	CP1	Operaciones	P(CUR)	P(CUR) considerando la *Estrategia 3*.
(N, N, N, N)	1	(1)	0.08%	0.09%
(N, N, N, B)	---	---	---	----
(N, N, N, E)	12	3 (4)	0.93%	0.93%
(N, N, B, B)	24	2 x 2 (6)	1.85%	1.86%
(N, N, B, E)	72	2 x 3 (12)	5.56%	5.6%
(N, B, B, B)	32	2 x 2 x 2 (4)	2.47%	2.48%
(N, N, E, E)	54	3 x 3 (6)	4.17%	4.19%
(N, B, B, E)	144	2 x 2 x 3 (12)	11.11%	11.18%
(B, B, B, B)	16	2 x 2 x 2 x 2 (1)	1.24%	1.24%
(N, B, E, E)	216	2 x 3 x 3 (12)	16.67%	16.77%
(B, B, B, E)	96	2 x 2 x 2 x 3 (4)	7.41%	7.45%
(N, E, E, E)	108	3 x 3 x 3 (4)	8.33%	8.38%
(B, B, E, E)	216	2 x 2 x 3 x 3 (6)	16.67%	16.77%
(B, E, E, E)	216	2 x 3 x 3 x 3 (4)	16.67%	16.77%
(E, E, E, E)	81	3 x 3 x 3 x 3 (1)	6.25%	6.29%
	$\Sigma = 1296$			$\Sigma = 100\%$

***Estrategia 4*: Empezar con 4 colores.**

Al existir 4 colores, todos los 15 CUR son posibles a excepción de (N,N,N,B). Con esto mencionado, los FR tienen los siguientes valores:

P(N) = $\frac{1}{6}$, puesto que el color se adivinó.

P(B) = $\frac{3}{6}$, puesto que se sigue el mismo principio que en *Estrategia 2*, es decir: $B = 4 - 1$

P(E) = $\frac{2}{6}$, puesto que es el resto de los colores que no se encuentran en el código.

Por último, así como en el cálculo de los CUR, debemos tomar en cuenta las combinaciones que se pueden hacer con los colores, los cuáles se encuentran entre paréntesis en la forma (x) y se multiplican por el resto de los factores. Así, la tabla para calcular el CP1 utilizando *Estrategia 4* es la siguiente:

Tabla 8. CP1 de *estrategia* 4. (Se omitieron las multiplicaciones por el factor “1”).

CUR	CP1	Operaciones	P(CUR)	P(CUR) considerando la *Estrategia 4.*
(N, N, N, N)	1	(1)	0.08%	0.09%
(N, N, N, B)	12	3 (4)	0.62%	----
(N, N, N, E)	8	2 (4)	0.93%	0.93%
(N, N, B, B,)	54	3 x 3 (6)	1.85%	1.86%
(N, N, B, E)	72	3 x 2 (12)	5.56%	5.6%
(N, B, B, B)	108	3 x 3 x 3 (4)	2.47%	2.48%
(N, N, E, E)	24	2 x 2 (6)	4.17%	4.19%
(N, B, B, E)	216	3 x 3 x 2 (12)	11.11%	11.18%
(B, B, B, B)	81	3 x 3 x 3 x 3 (1)	1.24%	1.24%
(N, B, E, E)	144	3 x 2 x 2 (12)	16.67%	16.77%
(B, B, B, E)	216	3 x 3 x 3 x 2 (4)	7.41%	7.45%
(N, E, E, E)	32	2 x 2 x 2 (4)	8.33%	8.38%
(B, B, E, E)	216	3 x 3 x 2 x 2 (6)	16.67%	16.77%
(B, E, E, E)	96	2 x 2 x 2 x 3 (4)	16.67%	16.77%
(E, E, E, E)	16	2 x 2 x 2 x 2 (1)	6.25%	6.29%
	$\Sigma = 1296$			$\Sigma = 100\%$

Entrelazamiento de CP1 y probabilidades de CUR

Una vez obtenida la probabilidad de obtener cada CUR y los CP1 de cada una de las 4 estrategias, el último paso a seguir es establecer una relación en donde se ordenen las estrategias de mayor a menor de acuerdo al número promedio de CP1. Para esto debemos calcular la magnitud de lo que representan los CP1 y P(CUR), variable la cuál denominaremos como “$CUR \wedge CP1$”. Usaremos un ejemplo para entender la importancia de entrelazar las dos variables a continuación:

> Por ejemplo, obtener un CUR de la forma (N,N,B,B) si el jugador_2 propone un primer código formado por dos colores deja 6 códigos restantes; esto es en principio mejor que obtener un CUR de la forma (B,B,B,B) utilizando 3 colores que deja 16 códigos restantes. Sin embargo, las probabilidades de obtener cada CUR son 1.85% y 7.41% respectivamente, haciendo entender que obtener un menor número de CP1 con determinado número de colores es una estrategia ínutil si la probabilidad de que el evento ocurra es considerablemente menor a otras opciones.

Para calcular la importancia de la información de “$CUR \wedge CP1$” usaremos la siguiente fórmula:

$$CUR \wedge CP1 = \Sigma\,(CP1 \times P(CUR))$$

Lo anterior resulta en los siguientes datos:

Tabla 9. “$CUR \wedge CP1$” de *Estrategia 2.*

Tabla 10. “$CUR \wedge CP1$”de *Estrategia 3.*

CP1	P(CUR)	Entrelazamiento	CP1	P(CUR)	Entrelazamiento
1	0.08%	0.0008	1	0.08%	0.0008
4	0.62%	0.0248	8	0.62%	0.0496
16	0.93%	0.1488	12	0.93%	0.1116
6	1.85%	0.111	24	1.85%	0.444
48	5.56%	2.6688	72	5.56%	4.0032
4	2.47%	0.0988	32	2.47%	0.7904
96	4.17%	4.0032	54	4.17%	2.2518
48	11.11%	5.3328	144	11.11%	15.9984
1	1.24%	0.0124	16	1.24%	0.1984
192	16.66%	31.9872	216	16.66%	35.9856
16	7.41%	1.1856	96	7.41%	7.1136
256	8.33%	21.3248	108	8.33%	8.9964
96	16.66%	15.9936	216	16.66%	35.9856
256	16.66%	42.6496	216	16.66%	35.9856
256	6.25%	16	81	6.25%	5.0625
$\Sigma = 1296$	100.00%	$\Sigma = 141.5422$	$\Sigma = 1296$	100.00%	$\Sigma = 152.9775$

Tabla 11. **“$CUR \wedge CP1$” de *Estrategia 4*.** **Tabla 12.** **“$CUR \wedge CP1$” de *Estrategia 1*.**

CP1	P(CUR)	Entrelazamiento	CP1	P(CUR)	Entrelazamiento
1	0.08%	0.0008	1	0.40%	0.004
12	0.62%	0.0744	20	4.41%	0.882
8	0.93%	0.0744	150	21.10%	31.65
54	1.85%	0.999	500	42.09%	210.45
72	5.56%	4.0032	625	32%	200
108	2.47%	2.6676	---	---	---
24	4.17%	1.0008	---	---	---
216	11.11%	23.9976	---	---	---
81	1.24%	1.0044	---	---	---
144	16.66%	23.9904	---	---	---
216	7.41%	16.0056	---	---	---
32	8.33%	2.6656	---	---	---
216	16.66%	35.9856	---	---	---
96	16.66%	15.9936	---	---	---
16	6.25%	1	---	---	---
Σ = 1296	100.00%	$\Sigma = 129.463$	$\Sigma = 1296$	100.00%	$\Sigma = 442.986$

Comparando el resultado de la relación **“$CUR \wedge CP1$”** encontramos que las estrategias que otorgan en promedio menos posibilidades (Es decir, un mejor resultado) se organizan de la siguiente manera:

Tabla 13. Orden de la mejor a la peor *Estrategia.*

Estrategia	Puntaje ($CUR \wedge CP1$)
Estrategia 4.	129.463
Estrategia 2.	141.5422
Estrategia 3.	152.9775
Estrategia 1.	442.986

Por ende, contrario a la hipótesis planteada al inicio de esta exploración matemática donde se asume que la mejor opción es empezar con la ***Estrategia 2*** de la forma (1,1,2,2), la ***Estrategia 4*** de la forma (1, 2, 3, 4) es la mejor primera jugada; es la que más cantidad de códigos posibles que es capaz de eliminar tras 1 jugada en promedio.

Conclusión

La hipótesis planteada en un inicio no fue cierta, los resultados indican que la ***Estrategia 4*** es la más eficiente, pues en promedio reduce las posibilidades a *129.463*. Esto puede deberse, entre otras cosas, a que el algoritmo planteado por Knuth puede depender de la *Estrategia 2* para funcionar más eficientemente, siendo no necesariamente la probabilidad que más reduce las posibilidades sino la que a largo plazo genera un mejor comportamiento para los CPn. Personalmente me fue imposible entender la perspectiva de Knuth, la cuál indica un caso como el siguiente:

> Cuando el primer código es de la forma (1, 1, 2, 3), las posibilidades restantes de recibir el CUR (N, N, E, E) son 222 CP1 (Knuth, 1976). Sin embargo, descomponiendo en factores primos el número resulta en 2, 3 y 37, factores los cuáles no fui capaz de explicar, pues utilizando la metodología de esta exploración el resultado obtenido es 216 CP1. Esta discordancia podría haberse replicado en más casos, y generar las posibilidades de tal suerte que sea en efecto la *Estrategia 2* la mejor opción. (Knuth, 1977).

Hablando empíricamente, también es posible que al momento de jugar, una persona puede considerar las condiciones entre distintos CPn se vuelve más complicado utilizando la *Estrategia 4* que utilizando la *Estrategia 2*, pues en esta última se juega en un sistema ternario (color 1, color 2 o ninguno). A pesar de lo anterior, no descarto los resultados obtenidos, pues más allá de ser absolutos o no demuestran la complejidad de este juego de mesa. Existe un punto en donde los resultados de la presente exploración matemática coinciden con Knuth, puesto que ambas no recomiendan la *Estrategia 1* y *Estrategia 3.* Otra observación es que a mayor incremento de colores no hay un mejor resultado, pues precisamente la *Estrategia 2* se encuentra por encima de la *Estrategia 3.* Finalmente, parece prudente recordar que esta exploración no es extensiva, sino solo una introducción matemática a un juego de mesa de combinatoria no tan trivial como aparentaría en un inicio.

Referencias:

Nelson, T (2000). A Brief History of the Master Mind Board Game. WayBack machine. https://web.archive.org/web/20150906044819/http://www.tnelson.demon.co.uk/mastermind/history.html

Knuth, D. (1975). The computer as mastermind [Artículo divulgativo]. Universidad de Stanford.